VANISHING THEOREMS FOR THE HOMOLOGY OF COXETER GROUPS AND THEIR ALTERNATING SUBGROUPS (Cohomology theory of finite groups and related topics)

秋田, 利之

数理解析研究所講究録
第1967巻 2015年 53-58

VANISHING THEOREMS FOR THE HOMOLOGY OF COXETER GROUPS AND THEIR ALTERNATING SUBGROUPS

北海道大学大学院理学研究院 秋田 利之
Toshiyuki Akita
Department of Mathematics
Hokkaido University

1. はじめに

G を群, p を素数, $H^k(G,\mathbb{F}_p)$ を G の k 次 mod p コホモロジー群とする. ここで $\mathbb{F}_p$ は p 個の元からなる体をあらわす.

$$H^k(G,\mathbb{F}_p)=0\ (0<k<d)$$

をみたす $0<k<d$ を (p における) vanishing range とよぶ. vanishing range に関わる結果で最も知られているのは Quillen [19] による

$$H^k(GL(n,\mathbb{F}_{p^r}),\mathbb{F}_p)=0\ (0<k<r(p-1)) \tag{1.1}$$

であろう. より一般に Bendel-Nakano-Pillen [5,6] は Lie 型の有限群に対する vanishing range を考察している. 一方 $\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群とすると

$$H^k(\mathfrak{S}_n,\mathbb{F}_p)=0\ (0<k<2p-3) \tag{1.2}$$

を Nakaoka [17,18] による対称群のホモロジー安定性と無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty$ の mod p ホモロジーの決定から導くことができる. n 次の交代群 A_n に対しては

$$H^k(A_n,\mathbb{F}_p)=0\ (0<k<p-2) \tag{1.3}$$

が Burichenko [9], Kleshchev-Nakano [14] により独立に証明されている. (1.1), (1.2), (1.3) はいずれも任意の n に対して成り立つことに注意されたい.

本稿の対象は Coxeter 群の交代部分群である. 対称群は Coxeter 群の重要な例であり, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の交代部分群は交代群 A_n に他ならない. 筆者は Coxeter 群が p-free であるという仮定の元で, (1.2) が一般の Coxeter 群に対しても成立することを示した [3]. さらに p-free な有限 Coxeter 群の交代部分群に対して (1.3) が成立することも示した (交代群に関する

結果の一部は筆者の学生の劉曄 (Ye Liu), 岡田妃乃子との共同研究に基づく). 前者については [4] にも書いたので本稿では後者について簡単に紹介したい.

2. COXETER 群と交代部分群

まず Coxeter 群の定義から始めよう. S を有限集合, $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を以下の条件をみたす写像とする (ただし $\mathbb{N}$ は 1 以上の自然数の集合をあらわす):

(1) 任意の $s \in S$ に対し $m(s,s) = 1$.
(2) 任意の相異なる $s,t \in S$ に対し $2 \leq m(s,t) = m(t,s) \leq \infty$.

生成集合 S と基本関係式 $(st)^{m(s,t)} = 1$ $(m(s,t) < \infty)$ により定義される群

$$W := \langle s \in S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (m(s,t) < \infty) \rangle \tag{2.1}$$

を Coxeter 群, 対 (W,S) を Coxeter 系とよぶ. 以下 W に対しその表示 (2.1) を固定する (群 W に対し W の Coxeter 群としての表示は一意的に定まるとは限らない).

各 $s \in S$ は W の位数 2 の元であり, 積 st $(m(s,t) < \infty)$ の位数はちょうど $m(s,t)$ である. S の元の数を W の階数とよび $\operatorname{rank} W$ と書く. 部分集合 $T \subseteq S$ に対し, T で生成される W の部分群 W_T を W の放物的部分群とよぶ. とくに $W_S = W$, $W_{\{s\}} \cong \mathbb{Z}/2$ $(s \in S)$, $W_\emptyset = \{1\}$ である. (W_T, T) は (写像 m の制限 $m|_{T\times T}$ に関して) Coxeter 系となる.

例 1. 階数 1 の Coxeter 群は位数 2 の巡回群である. 階数 2 の Coxeter 群は, 生成集合を $S = \{s,t\}$ としたとき, $m(s,t) < \infty$ なら位数 $2m(s,t)$ の二面体群

$$D_{2m(s,t)} = \langle s,t \mid s^2 = t^2 = (st)^{m(s,t)} = 1 \rangle,$$

$m(s,t) = \infty$ なら無限二面体群 (2 つの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自由積)

$$D_\infty = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle s,t \mid s^2 = t^2 = 1 \rangle$$

である.

例 2. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は階数 $n-1$ の Coxeter 群である. 実際, 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対し $s_i = (i,i+1)$ (互換) とし, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ とすれば, $(\mathfrak{S}_n, S)$

は Coxeter 系となる. 基本関係式を与える写像 $m: S \times S \to \mathbb{N}$ は

$$m(s_i, s_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 3 & |i-j| = 1 \\ 2 & |i-j| > 1 \end{cases}$$

である.

D_{2m} は $\mathbb{R}^2$ 上の有限鏡映群として実現でき, また $\mathfrak{S}_{n+1}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の有限鏡映群として実現できるが, 一般に有限 Coxeter 群は $\mathbb{R}^n$ ($n = \mathrm{rank}\, W$) 上の有限鏡映群として実現できる. 逆に $\mathbb{R}^n$ 上の有限鏡映群は Coxeter 群としての表示をもつ. 有限 Coxeter 群は完全に分類されている. Coxeter 群の一般論については [1,7,10,13], 有限鏡映群については [11] を参照されたい.

(W, S) を Coxeter 系とする. 準同型 $\mathrm{sign}: W \to \{\pm 1\}$ を $s \mapsto -1$ ($s \in S$) により定義する. W が対称群のとき sign は置換の符号に他ならない. sign の核 $\ker \mathrm{sign}$ を W の交代部分群 (alternating subgroup) とよび $A(W)$ とかく (rotation subgroup とよばれることもある). 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の交代部分群は交代群 A_n である. 交代部分群の表示も知られている (Bourbaki [7] に演習問題として載っている).

3. 交代部分群のコホモロジー

対称群のコホモロジーについては多くの研究があるが, 交代群のコホモロジーについての論文はあまり多くない. §1 であげた Burichenko [9], Kleshchev-Nakano [14] の他に筆者が知っているのは Bröcker [8], Mann [15], Adem-Maginnis-Milgram [2], Henn-Mui [12] ぐらいである (最後の論文は分類空間の stable splitting が主題だが).

Coxeter 群の交代部分群のコホモロジーについて知られている結果はさらに少ない. W を有限 Coxeter 群, $A(W)$ をその交代部分群とすると

$$H^1(A(W), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A(W), \mathbb{Z}) = 0$$
$$H^2(A(W), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A(W), \mathbb{C}^\times)$$

が成り立つ. 後者は $A(W)$ の表示により計算可能である. さらに Maxwell [16] により $A(W)$ の Schur multiplier $H^2(A(W), \mathbb{C}^\times) \cong H^3(A(W), \mathbb{Z})$ が決定されている. よって 3 次以下の整数係数コホモロジーはわかっているが, 高次のコホモロジーについての結果は (私が知る限り) ない.

§1 で述べたように, 任意の n に対し交代群 A_n の mod p コホモロジーが

$$H^k(A_n, \mathbb{F}_p) = 0 \ (0 < k < p-2) \tag{3.1}$$

をみたすことは知られていた. (3.1) は有限 Coxeter 群の交代部分群に対しては常に成立するわけではない. 例えば位数 $2p$ の二面体群の交代部分群は位数 p の巡回群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である. p を奇素数とすると $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のコホモロジー環はよく知られているように

$$H^*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p(u) \otimes \Lambda(v) \ (\deg u = 2, \deg v = 1)$$

であり, とくに $H^k(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p) \neq 0 \ (k > 0)$ である.

4. 主結果

W を Coxeter 群, p を奇素数とする. W の表示を定める写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ の値 $m(s,t)$ が常に p と素であるとき, W を p-free と呼ぶことにしよう (ただし ∞ は p と素であるとする). $m(s,t)$ が p と素であることと積 st の位数が p と素であるは同値である. 位数 $2m$ の二面体群

$$D_{2m} = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = 1 \rangle$$

が p-free である必要十分条件は m が p と素であることである. また対称群 $\mathfrak{S}_n$ は任意の $p \geq 5$ に対し p-free である.

定理 3. *p を奇素数, W を p-free な有限 Coxeter 群, $A(W)$ を W の交代部分群とすると $H^k(A(W), \mathbb{F}_p) = 0 \ (0 < k < p-2)$ が成り立つ.*

定理 3 は交代群 A_n の vanishing range (1.3) の一般化であり, その証明は Burichenko [9], Kleshchev-Nakano [14] による結果 (3.1) の別証明にもなっている. 定理 3 は無限位数の Coxeter 群の場合には成り立たない (場合がある) ことを注意しておこう. 整数 $m_1, m_2, m_3 \geq 2$ に対し

$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^{m_1} = (s_2 s_3)^{m_2} = (s_3 s_1)^{m_3} = 1 \rangle$$

を完全三角群とよぶ. W は階数 3 の Coxeter 群である. その交代部分群 $A(W)$ は三角群とよばれ

$$A(W) = \langle r_1, r_2 \mid r_1^{m_1} = r_2^{m_2} = (r_1 r_2)^{m_3} = 1 \rangle$$

という表示をもつ ($r_1 = s_1 s_2$, $r_2 = s_2 s_3$ である). W の (よって $A(W)$ の) 位数が有限であるための必要十分条件は

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \geq 1$$

であることが知れれている. $A(W)$ が無限位数なら $H_2(A(W),\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ であることが証明でき, よって普遍係数定理より, 任意の素数 p に対し $H^2(A(W),\mathbb{F}_p) \neq 0$ であることがわかる. Coxeter 群の場合は無限位数の場合も含めて次の結果が成り立つ.

定理 4 ([3]). *p を奇素数, W を p-free な Coxeter 群とすると $H^k(W,\mathbb{F}_p) = 0$ $(0 < k < 2p-3)$ が成り立つ.*

REFERENCES

[1] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown, *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008. Theory and applications. MR2439729 (2009g:20055)

[2] Alejandro Adem, John Maginnis, and R. James Milgram, *Symmetric invariants and cohomology of groups*, Math. Ann. **287** (1990), no. 3, 391–411, DOI 10.1007/BF01446902. MR1060683 (91i:55022)

[3] Toshiyuki Akita, *Vanishing theorem for the p-local homology of Coxeter groups* (2014), available at `arXiv:1406.0915`.

[4] ———, *Coxeter 群のホモロジーの p-primary component について*, 数理解析研究所講究録 **1922** (2014), 170–174.

[5] Christopher P. Bendel, Daniel K. Nakano, and Cornelius Pillen, *On the vanishing ranges for the cohomology of finite groups of Lie type*, Int. Math. Res. Not. IMRN **12** (2012), 2817–2866, DOI 10.1093/imrn/rnr130. MR2942711

[6] ———, *On the vanishing ranges for the cohomology of finite groups of Lie type II*, Recent developments in Lie algebras, groups and representation theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 86, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 25–73, DOI 10.1090/pspum/086/1410. MR2976996

[7] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1981 (French). Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6. [Lie groups and Lie algebras. Chapters 4, 5 and 6]. MR647314 (83g:17001)

[8] Theodor Bröcker, *Homologie symmetrischer und alternierender Gruppen*, Invent. Math. **2** (1967), 222–237 (German). MR0228564 (37 #4144)

[9] Vladimir P. Burichenko, *Extensions of cocycles, Cohen-Macaulay geometries, and a vanishing theorem for cohomology of alternating groups*, J. Algebra **269** (2003), no. 2, 402–421, DOI 10.1016/S0021-8693(03)00437-X. MR2015284 (2004i:20097)

[10] Michael W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. MR2360474 (2008k:20091)

[11] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 99, Springer-Verlag, New York, 1985. MR777684 (85m:20001)

[12] Hans-Werner Henn and Huỳnh Mui, *Stable splittings for classifying spaces of alternating, special orthogonal and special unitary groups*, Algebraic topology (Oaxtepec, 1991), Contemp. Math., vol. 146, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 143–158, DOI 10.1090/conm/146/01220. MR1224912 (94g:55021)

[13] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1066460 (92h:20002)

[14] Alexander S. Kleshchev and Daniel K. Nakano, *On comparing the cohomology of general linear and symmetric groups*, Pacific J. Math. **201** (2001), no. 2, 339–355, DOI 10.2140/pjm.2001.201.339. MR1875898 (2002i:20063)

[15] Benjamin M. Mann, *The cohomology of the alternating groups*, Michigan Math. J. **32** (1985), no. 3, 267–277, DOI 10.1307/mmj/1029003238. MR803832 (87h:20096)

[16] George Maxwell, *The Schur multipliers of rotation subgroups of Coxeter groups*, J. Algebra **53** (1978), no. 2, 440–451. MR0486097 (58 #5885)

[17] Minoru Nakaoka, *Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 16–42. MR0112134 (22 #2989)

[18] ———, *Homology of the infinite symmetric group*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 229–257. MR0131874 (24 #A1721)

[19] Daniel Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 552–586. MR0315016 (47 #3565)

E-mail address: akita@math.sci.hokudai.ac.jp